

Ceci n'est pas le titre

Certaines phrases traitant d'elles-mêmes ne sont ni vraies ni fausses ; à l'opposé, d'autres sont vraies en même temps que leur négation. Caillou, puis atout dans la chaussure des logiciens, les autoréférences apparaissent dans tous les domaines.

Une phrase autoréférente est une phrase qui se rapporte à elle-même, ce qui est le cas de celle-ci. Une phrase autoréférente peut être contradictoire (exemple : « Cette phrase est fausse »), mais elle ne l'est pas nécessairement, comme le montre cette même phrase, qui est vraie. Plus troublant : une phrase autoréférente peut être vraie ainsi que sa négation. « Cette phrase comporte cinq mots » est vraie. Sa négation « Cette phrase ne comporte pas cinq mots » l'est aussi. Bien sûr, une phrase autoréférente peut être fausse, ainsi que sa négation, c'est le cas de « Cette phrase comporte sept mots ».

L'autoréférence fascine les logiciens et constitue un de leur outil préféré. Dans le cours du XX^e siècle, elle est au cœur de la démonstration de grands résultats en logique mathématique dont le premier théorème d'incomplétude de Gödel de 1931. Celui-ci est fondé sur une exploitation rigoureuse de l'idée suivante : si un système S pour écrire des démonstrations ne démontre que des choses vraies et autorise qu'on écrive une phrase G signifiant « Cette phrase ne peut pas être démon-

trée dans S », alors nécessairement l'affirmation G n'est pas démontrable dans S , et donc G est vraie (d'où il résulte que S peut exprimer des phrases vraies dont il ne peut pas donner la démonstration : c'est l'incomplétude).

L'exploration des étrangetés auxquelles l'autoréférence donne naissance fascine et amuse les amateurs de divertissements logiques et mathématiques. Ce sont ces aspects ludiques de l'autoréférence qui vont nous occuper ici.

Phrases paradoxales

Pour la science a proposé en 1986 un concours de paradoxes dont les résultats ont été publiés dans le numéro 100. Il est remarquable que la majorité des phrases paradoxales retenues étaient autoréférentes. En voici quelques-unes :

- *J'avais toujours pensé que seuls les imbéciles ne changent pas d'avis. Comme j'ai vu qu'il y a là un paradoxe, j'ai changé d'avis : je pense maintenant que la première idée est toujours la bonne.* (P. Barbin)
- *Si je suis fier d'une chose, c'est de ma modestie.* (J. de Pol)
- *Avant de détruire définitivement cette phrase, faites-en une copie.* (A. Cohen)
- *Je parie que je perds ce pari, tu paries ?* (E. Dewin)
- *Le paradis est rempli d'idiots qui croient que le paradis existe.* (S. Landry)
- *Toute question attend-elle une réponse ?* (J. Delcourt)
- *J'ai horreur des gens qui critiquent.* (H. Tesserau)
- *Je passe sans transition à la phrase suivante.* (D. Destraz)
- *Les racistes sont des êtres inférieurs.* (A. Dollars)

1. Dans les autologlyphes, le dessin rejoint le dessin : ils s'autodécrivent d'une manière indirecte et subtile [voir : <http://www.stanford.edu/~segerman/autologlyphs.html>]. Voici deux exemples de telles figures qui s'ajoutent à celles proposées dans l'article de septembre dernier sur les ambigrammes. L'autologlyphe « Cantor » évoque l'ensemble triadique de Cantor qui se construit en enlevant le tiers médian d'un segment, puis le tiers médian de chaque morceau restant, etc. C'est l'ensemble fractal le plus simple que l'on imagine et sans doute le premier utilisé par un mathématicien. Quant à l'entropie, elle n'échappe pas à la dégradation que la thermodynamique détermine.



Jean-Paul Delahaye

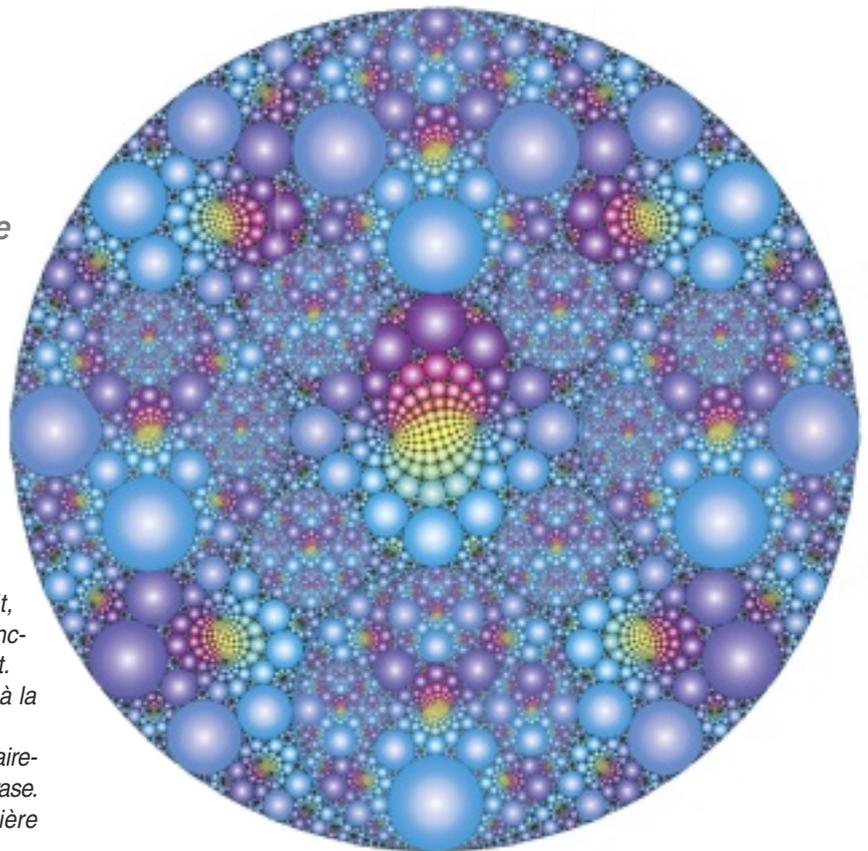
Comme un bon chocolat ou un vin fin, les paradoxes procurent un plaisir délicat et les autoréférences, qui sont souvent des jeux de mots, sont des confiseries mentales. Les formes de l'autoréférence sont innombrables et variées et Douglas Hofstadter en pratique l'art avec virtuosité. Voici quelques exemples des délices qu'on lui doit (publiés dans son livre *Ma thémagie*).

- *Je suis la littérale traduction d'une anglaise phrase.*
- *Ne serait anormale si fut en italien.*
- *Si on cette phrase dans l'allemand traduite voulait, pourrait-on le fait exploiter que se le mot-ordre et la ponctuation déjà avec les allemandes conventions accordent.*
- *Si cette phrase avait douze mots, on en écrirait treize à la douzaine.*
- *Tout l'intérêt de cette phrase tient à ce que l'on veut clairement y faire comprendre en quoi consiste l'intérêt de cette phrase.*
- *Le dernier mot de cette phrase comporte une grossière faute d'orthographe au mot « taumate ».*
- *Bien que cette phrase commence par les mots « parce que » elle est fausse.*
- *Cett phrase n'est pas autoréférente car « cett » nest pas un mot.*
- *Cette phrase était écrite à l'imparfait.*

L'autoréférence en science et dans l'art

Le peintre René Magritte et le graveur Maurits Escher ont largement utilisé l'autoréférence créant des chefs-d'œuvre comme le fameux « Ceci n'est pas une pipe » (Magritte) ou des dessins montrant une main qui en dessine une autre qui dessine la première (Escher). À vrai dire, l'autoréférence est omniprésente. Citons quelques exemples dans les sciences :

- Les êtres vivants qui contiennent en eux-mêmes l'essentiel de leur propre plan grâce au code génétique.
- Les programmes informatiques qu'on définit en se référant à eux-mêmes dans leur écriture et qu'on dénomme programmes récursifs. Exemple : la fonction factorielle définie par : $f(n) = (1 \text{ si } n = 0 ; f(n - 1) * n \text{ sinon})$.
- En sciences cognitives, on a parfois considéré que la conscience résultait de la capacité d'un esprit à se référer à lui-même.
- Les structures fractales dont les parties sont des copies du tout en versions réduites (voir la figure 2).



2. Motif fractal dans un disque. Une famille infinie de disques remplit un disque selon un dessin fractal. Une fractale est autoréférente, car certaines parties du motif contiennent l'essentiel du tout.

On en trouve tout autant dans les arts. Un site Internet (chercher *List-of-self-referential-songs*) recense par exemple les chansons contenant une autoréférence. Cette liste de 18 pages contient : « Ambulance blues » de Neil Young : *It's hard to know the meaning of this song*, « The Ballad of Dorothy Parker » de Prince : *This is the ballad of Dorothy Parker*, « Song to Woody » de Bod Dylan : *Hey, hey Woody Guthrie, I wrote you a song*, « Hailie's Song » de Eminem : *I told you I can't sing, Oh well, I tried*, Dans « I'm so Worried » des Monty Python : *I'm so worried about whether people like this song*. Qui proposera une liste équivalente de chansons françaises ?

Une comédie autoréférente a été écrite par Nikos Lygeros et mise en scène par la compagnie *Caméléon*. Son titre est « Autoréférence » et elle évoque les aventures de deux idées perdues dans un texte autoréférentiel.

En littérature, les autoréférences se glissent partout. Un livre récent de Denis Mellier leur est consacré (*Textes Fantômes, Fantastique et autoréférence*, Éd. Kimé, 2001). Un colloque international de philosophie et de logique, intitulé *Self reference*, s'est réuni en novembre 2002 organisé par l'Université de Roskilde et le mathématicien Raymond

entree

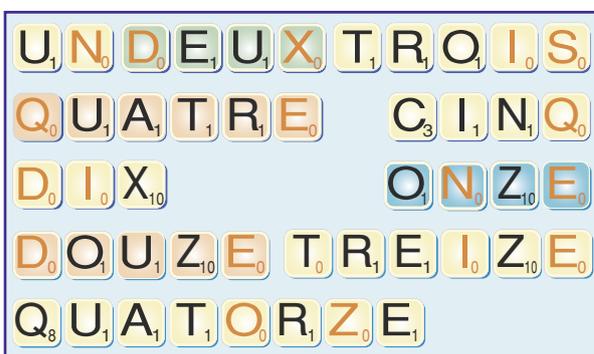
Smullyan (auteur d'un livre intitulé *Quel est le titre de ce livre ?*) y participait. Un autre colloque s'est tenu la même année à Pau sur le thème *Autoréférence et paradoxes de l'Art*.

Revenons au domaine du divertissement et aux merveilleuses phrases autodéscriptives. Ces dernières années, de nombreuses nouveautés ont été proposées. Citons d'abord quelques trouvailles ingénieuses de Pascal Kaeser :

– *Les diviseurs du nombre de lettres de cette phrase sont : un, trois, neuf, vingt-sept et quatre-vingt-un.*

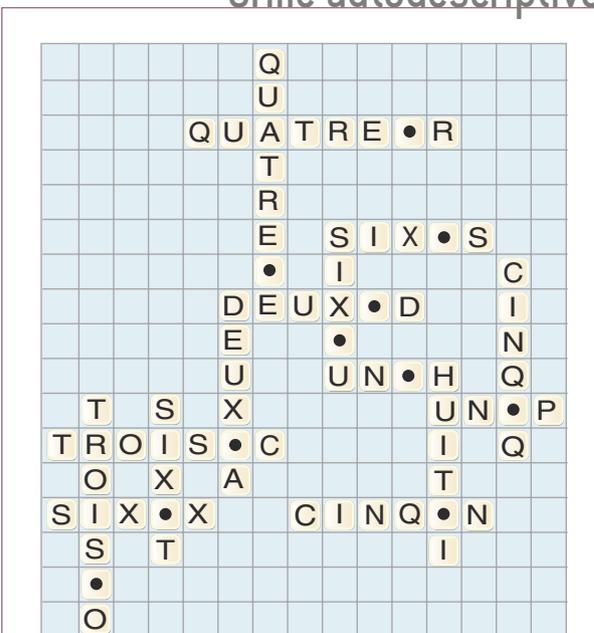
Vous vérifierez que la phrase possède bien 81 lettres. En gardant exactement la même structure, il existe une autre solution que nous vous invitons à chercher.

– *Cette phrase contient neuf mots de deux lettres, deux mots*



3. Tous les mots qui, au Scrabble, écrivent leur valeur totale en points (l'indice 0 est celui des jetons blancs utilisés comme joker).

Grille autodéscriptive



Dans cette grille autodéscriptive d'Eric Angelini, il s'agit de croiser des suites de symboles du type QUATRE•R, TROIS•B etc. de telle façon qu'au total la grille décrive complètement et de manière exacte les lettres qu'elle contient. De nombreux problèmes restent irrésolus concernant ces grilles. Peut-on en trouver qui mentionnent toutes les lettres de l'alphabet. Si oui, quelle la plus petite d'entre-elles ? (voir <http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com>).

de trois lettres, treize mots de quatre lettres, trois mots de cinq lettres, quatre mots de six lettres, sept mots de sept lettres et un mot de huit lettres.

– *Dans cette phrase, seuls les deuxième, quatrième, cinquième, septième, huitième, douzième, quatorzième et vingtième mots comportent un nombre de lettres impair.*

Ces phrases sont certes amusantes, mais elles ne sont que partiellement autodéscriptives. Il faudrait aller plus loin. Jacques Pitrat dans un article de *Pour la science* (« Cette phrase contient exactement... » juillet 1999, pages 104-107) expliquait comment obtenir des phrases complètement autodéscriptives du type : *Ce titre contient quatre a, un b, cinq c, cinq d, dix-neuf e, deux f, un g, deux h, treize i, un j, un k, un l, un m, seize n, trois o, quatre p, sept q, sept r, sept s, quinze t, dix-huit u, un v, un w, six x, un y et quatre z.*

Notez bien que la phrase contient effectivement quatre a, un b, etc., elle décrit ainsi la totalité de ses composants.

Eric Angelini, auteur des plus belles pages Internet en français consacrées à l'autoréférence a réuni des variantes de ces phrases impossibles à trouver sans ordinateur et dont chacune est un bijou de précision autoréférente. L'adresse des pages de E. Angelini, comme il se doit, est autoréférente : <http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com>

On y trouve les versions, en d'autres langues, de la phrase autodéscriptive de Jacques Pitrat. Voici une variante néerlandaise, due à De Rudy Kousbroek : *Dit pangram bevat vijf a's, twee b's, drie d's, zesenvertig e's, vijf f's, vier g's, twee h's, vijftien i's, vier j's, een k, twee l's, twee m's, zeventien n's, een o, twee p's, een q, zeven r's, vierentwintig s's, zestien t's, een u, elf v's, acht w's, een x, een y, en zes z's.*

Une version anglaise due à Lee Sallows est : *This pangram contains four a's, one b, two c's, one d, thirty e's, six f's, five g's, seven h's, eleven i's, one j, one k, two l's, two m's, eighteen n's, fifteen o's, two p's, one q, five r's, twenty-sevens's, eighteen t's, two u's, seven v's, eight w's, two x's, three y's, one z.*

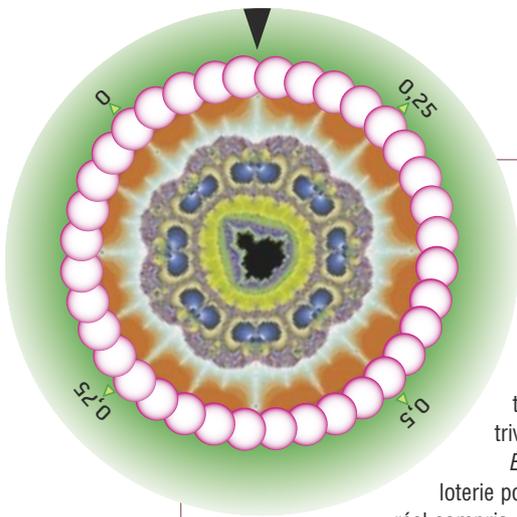
En allemand, Bernhard Seckinger propose : *Dieser Satz besteht aus acht A, sechs B, sechs C, sieben D, fünfundvierzig E, acht F, vier G, neun H, fünfundzwanzig I, einem J, einem K, zwei L, elf M, achtundzwanzig N, einem O, einem P, einem Q, sieben R, dreizehn S, sieben T, sieben U, fünf V, vier W, einem X, einem Y, zehn Z, einem Ä, einem Ö, vier Ü und einem B.*

Les pangrammes

Un pangramme est une phrase qui utilise chaque lettre de l'alphabet au moins une fois. Toutes ces phrases en sont. Le plus connu et le plus court sert dans des exercices de dactylographie : *Portez ce vieux whisky au juge blond qui fume.*

Une certaine liberté dans la formulation de la structure des pangrammes autoréférents est permise : à la place de « Cette phrase contient... », on peut écrire « Cette phrase comporte... » ou « Ce pangramme a » etc. Cette liberté facilite le travail en multipliant les possibilités. Le puriste souhaiterait qu'un pangramme autoréférent ne contienne aucun élément arbitraire à rechercher sous la forme : « Deux a, cinq b, huit c,... , un z. » Aucun pangramme parfait de ce type n'a encore été trouvé, mais on n'a pas démontré (à ma connaissance) qu'il n'en n'existerait pas. Un lecteur de *Pour la science* y arrivera-t-il ?

Un subtil raisonnement autoréférent



L'autoréférence, très présente en mathématiques, constitue un moyen astucieux pour résoudre des problèmes sans rapport évident avec l'autoréférence. Voici un exemple remarquable (dû au mathématicien D. Newman) d'énigme non triviale que l'autoréférence résout.

Énoncé : On lance une roue de loterie pour tirer au hasard un nombre réel compris entre 0 et 1. On recommence jusqu'à ce que la somme S des nombres tirés dépasse 1.

Montrer qu'il faut en moyenne e tirages pour dépasser 1 (où e est la base du logarithme népérien : $e = 2,71828\dots$).

Solution : Pour résoudre le problème, nous allons le généraliser. Intéressons-nous au nombre $E(t)$ de tirages nécessaires en moyenne pour que la somme S dépasse t (un nombre entre 0 et 1).

Nous supposons que la fonction E est continue et dérivable. Nous savons que $E(0) = 1$ et nous voulons connaître $E(1)$. Si nous lançons la roue une fois et obtenons une valeur x supérieure à t , la réponse est 1 et sinon, c'est-à-dire si la valeur de x obtenue par le tirage est inférieure à t , le nombre de lancés nécessaires pour dépasser t sera maintenant $1 + E(t-x)$. C'est ici qu'intervient l'autoréférence : E est définie à partir de E . Traduit en équation, ce que nous venons d'énoncer s'écrit :

$$E(t) = \int_0^t 1 dx + \int_0^t (1+E(t-x)) dx$$

Des manipulations habituelles sur les intégrales donnent :

$$E(t) = 1 + \int_0^t E(t-x) dx = 1 + \int_0^t E(u) du$$

Cette dernière équation, en dérivant de chaque côté de l'égalité, conduit à : $E'(t) = E(t)$, ce qui avec $E(0) = 1$ donne $E(t) = \exp(t)$, et donc $E(1) = e$, ce que nous cherchions à obtenir. Dans une roue de loterie, on sait que le nombre $\pi = 3,14159\dots$ est caché dans le rapport entre le périmètre et le diamètre de la roue. Nous voyons aujourd'hui que le nombre $e = 2,71828\dots$ s'y trouve aussi.

Pascale de Valensart Schoenmaeckers semble avoir trouvé trois solutions à ce qu'on pourrait appeler le problème des pansignes alphanumériques (qui comme le panchiffre cité au-dessus sont indépendants de la langue utilisée) :

– 1A, 2B, 1C, 1D, 1E, 1F, 1G, 1H, 1I, 1J, 1K, 1L, 1M, 1N, 1O, 1P, 1Q, 1R, 1S, 1T, 1U, 1V, 1W, 1X, 1Y, 1Z, 10, 1B1, 32, 23, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

– 1A, 1B, 1C, 2D, 1E, 1F, 1G, 1H, 1I, 1J, 1K, 1L, 1M, 1N, 1O, 1P, 1Q, 1R, 1S, 1T, 1U, 1V, 1W, 1X, 1Y, 1Z, 10, 1D1, 32, 23, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

– 1A, 1B, 1C, 1D, 1E, 2F, 1G, 1H, 1I, 1J, 1K, 1L, 1M, 1N, 1O, 1P, 1Q, 1R, 1S, 1T, 1U, 1V, 1W, 1X, 1Y, 1Z, 10, 1F1, 32, 23, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Notons les étranges 1B, 1D et 1F qui indiquent que le nombre de 1 n'est pas écrit selon la base 10. Les bases retenues sont respectivement 23, 21 et 19. On a convenu (ce qui est la convention habituelle) qu'après 9, les chiffres sont dans l'ordre A, B, C, D etc. ; Donc, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13... Le nombre 3A en base 23 représente donc en base 10 le nombre $3 * 23 + 10 = 79$. Le choix d'utiliser les bases 23, 21 et 19 pour écrire les pansignes alphanumériques provient de ce qu'il n'existe pas de solutions pour la base 10.

De style dépouillé, les phrases autoréférentes suivantes, qui ne sont plus des pangrammes, ne manquent pas de charme :

- Cinq c, cinq i, cinq n, cinq q.
- Six s, six i, six x, six u, six n, un a, un b, un c, un d, un e.
- Sept s, sept e, sept p, sept t, sept u, sept n, un v, un w, un x, un y, un z, un a.

En allemand : Acht a, acht c, acht h, acht t, acht e, acht i, acht n, ein b, ein d, ein f, ein g, ein j, ein k, ein l.

En italien : Sette e, tre r, tre s, sette t.

Rien n'arrête les chercheurs d'autoréférences !

E. Angelini, amateur obsessionnel d'autoréférences, s'est intéressé à l'autoréférence au Scrabble, le jeu de mots par excellence. Voici sa récolte : tous les mots qui écrivent leur valeur totale en points (l'indice 0 est celui des jetons blancs utilisés comme joker) sont représentés sur la figure 3.

Dans la même veine, mais en travaillant à plus gros grains, E. Angelini propose la phrase autodéscriptive :

Dans cette phrase le mot dans apparaît deux fois, le mot cette apparaît deux fois, le mot phrase apparaît deux fois, le mot le apparaît douze fois, le mot mot apparaît douze fois, le mot apparaît apparaît douze fois, le mot fois apparaît douze fois, le mot douze apparaît cinq fois, le mot cinq apparaît deux fois, le mot deux apparaît six fois, le mot six apparaît deux fois.

Forme purifiée de l'exercice, toujours due à E. Angelini :

Vous lisez ici vous deux fois, lisez deux fois, ici deux fois, fois neuf fois, neuf deux fois, deux sept fois, sept deux fois et et deux fois.

Si on remplace *vous lisez* par *vous avez lu* la phrase n'est plus vraie, car au moment où on arrive sur un mot, seule une partie de la phrase a été lue. Prendre en compte ce repère temporel glissant est un nouveau problème. E. Angelini l'a résolu avec le magnifique :

Vous avez lu vous deux fois, avez deux fois, lu deux fois, deux quatre fois, fois six fois, quatre deux fois, six deux fois et et deux fois.

Pour le futur et toujours en prenant au sérieux le temps de la phrase, il a trouvé cette autoréférence prédictive :

Vous trouverez trois une fois encore, une une fois, fois trois fois, encore zéro fois, zéro une fois et et zéro fois, dont la version brève est une magnifique phrase de conclusion :

Vous ne lirez plus vous, ni ne, ni lirez, ni plus, ni ni.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

Eric ANGELINI, *Autoréférence* : <http://www.cetteadressecomportecinquantessignes.com>

Denis MELLIER, *Textes Fantômes, Fantastique et autoréférence*, Éditions Kimé, Collection Détours Littéraires, 2001.

Jacques PITRAT, *Cette phrase contient exactement...*, *Pour la science*, pp. 104-107, juillet 1999.

Jon BARWISE et Laurence MOSS, *Vicious Circles*, CLSI Lecture Notes n° 60, Stanford, California, ISBN 1 57586 009 0, 1996.

Jean-Paul DELAHAYE, *La cinquième référence de cette bibliographie*, à paraître dans *Pour la science* de janvier 2005.

Douglas HOFSTADTER, *Ma Thémagie*, InterEditions, Paris, 1988.